Progressões Aritméticas

Introdução

Chama-se seqüência ou sucessão numérica, a qualquer conjunto ordenado de números reais ou complexos.

Exemplo: $A=(3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 35)$.

Uma seqüência pode ser finita ou infinita.

Seqüência $P=(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ é infinita.

Seqüência genérica: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n, \ldots)$ onde a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, ... , a_k é o k-ésimo termo, ... , a_n é o n-ésimo termo. (Neste caso, $k < n$).

Exemplo: $Y=(2, 6, 18, 54, 162, 486, \ldots)$
$a_3=18$, $a_5=162$, etc.

Considere por exemplo a seqüência S cujo termo geral seja dado por $a_n=3n+5$, onde n é um número natural não nulo.

S=(8, 11, 14, 17, 20,...).
Exemplo: $a_n=n^2+4n+10$, para $n \in Z_+^*$.
$(15, 22, 31, 42, 55, 70, \ldots)$.

$a_6=70$ porque $a_6=6^2+4.6+10=36+24+10=70$.

Exemplos

01. Determinar os cinco primeiros termos da seqüência definida por: $a_n = 4n^2 - 2,\ n \in \mathrm{IN}^*$.

02. Consideremos a seqüência definida por $a_n = 2n - 7,\ n \in \mathrm{IN}^*$. Determine o valor de a_5.

03. Construir a seqüência definida pelas relações:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 3,\ n \in \mathrm{IN}^* \end{cases}$$

Conceito de Progressão Aritmética – PA

Chama-se Progressão Aritmética – PA – à toda seqüência numérica cujos termos a partir do segundo, são iguais ao anterior somado com um valor constante denominado razão.

Exemplos:
$A=(1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots)$ $r=4$
$B=(3, 12, 21, 30, 39, 48, \ldots)$ $r=9$
C=(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) $r=0$
$D=(100, 90, 80, 70, 60, 50, \ldots)$ $r=-10$

Termo Geral de uma PA

Seja a PA genérica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r.

$a_2=a_1+1.r$
$a_3=a_2+r=(a_1+r)+r=a_1+2r$
$a_4=a_3+r=(a_1+2r)+r=a_1+3r$
……………………………………………
……………………………………………

Podemos inferir (deduzir) das igualdades acima que: $a_n = a_1 + (n-1)r$

A expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$ é denominada termo geral da PA.

Exemplos

04. Qual o milésimo número ímpar positivo?

05. Qual o número de termos da PA: *(100, 98, 96,..., 22)* ?

Generalizando:

Sendo a_j o termo de ordem j (j-ésimo termo) da PA e a_k o termo de ordem k (k-ésimo termo) da PA, poderemos escrever a seguinte fórmula genérica:

$$a_j=a_k+(j-k).r$$

Exemplos

06. Se numa PA o quinto termo é 30 e o vigésimo termo é 60, qual a razão?

07. Numa PA de razão 5, o vigésimo termo vale 8. Qual o terceiro termo?

08. Calcular o 50º. termo da P.A. (-3, 1, 5, 9, ...).

09. Determinar a P.A. que possui as seguintes características: o 10º. termo vale 48 e a soma do 5º.

com o 20º. termo é igual a 121.

10. Encontrar o primeiro termo negativo da P.A. (37, 35, 33, ...).

11. Determinar x de modo que a seqüência $(x^2+1,\ x+2,\ 4x)$ seja uma P.A.

12. Interpolar 20 meios aritméticos entre 7 e 91.

13. Quantos múltiplos de 3 existem entre 200 e 400.

Propriedades

P1. Numa PA, cada termo (a partir do segundo) é a média aritmética dos termos vizinhos deste.

P2. Numa PA, a soma dos termos eqüidistantes dos extremos é constante.

P3. Soma dos n primeiros termos de uma PA

$$S_n = \frac{\left(a_1 + a_n\right).n}{2}$$

Exemplos

14. Encontrar três números em P.A. cuja soma seja 33 e o produto, 440.

15. Construir uma P.A. de quatro termos em que a soma dos dois primeiros é –8 e a dos dois últimos é 16.

16. Calcular a soma dos 50 primeiros termos da P.A. $(11,\ 13,\ 15, \ldots)$

17. Em relação à seqüência dos números naturais ímpares, calcule:

a) a soma dos trinta primeiros termos;
b) a soma dos *n* primeiros termos.

Questões anteriores da ANPAD

01. Um médico recomendou a Marcos que caminhasse todos os dias para melhorar sua saúde. No primeiro dia, ele caminhou *x* metros; no segundo dia, caminhou o dobro do que percorreu no primeiro dia; no terceiro dia, caminhou o triplo do que percorreu no primeiro dia; e assim sucessivamente. Ao final de 20 dias, percorreu um total de 63.000 m. A quantidade de metros percorrida no primeiro dia foi de:

a) 150m
b) 200m
c) 250m
d) 300m
e) 350m

02. Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. A expressão que representa essa situação é:

a) $4x+28=100$
b) $5(x+7)=100$
c) $5x+70=100$
d) $x=100/5$
e) $x=28/5$

03. A **soma** dos ***n*** primeiros números **pares positivos** é:

a) $n(n+1)$
b) $\frac{n(n+1)}{2}$
c) $2n$
d) $2n^2$
e) $2n+1$

04. Dadas as seqüências:

I. (2, 6, 18, 54, ...)
II. (2, 10, 50, 250, ...)
III. (2, 2, 4, 64, 64^4, ...)

Suas fórmulas de recorrência são respectivamente:

a) $a_1=2$ e $a_{n+1}=3a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=5n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=2a_1$, sendo $n\geq1$.
b) $a_1=2$ e $a_{n+1}=3n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=5n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=2n$, sendo $n\geq1$.
c) $a_1=2$ e $a_{n+1}=3a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=5a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=na_n$, sendo $n\geq1$.
d) $a_1=2$ e $a_{n+1}=3a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=5a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=(a_n)^n$, sendo $n\geq1$.
e) $a_1=2$ e $a_{n+1}=3n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=10a_n$; $a_1=2$ e $a_{n+1}=na_n$, sendo $n\geq1$.

05. Considere a seguinte fórmula recursiva:

$f(0)=500$

$f(n+1)=f(n)-1$, $n\geq0$, inteiro.

Então o valor de $f(500)$ é:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 499
e) 500

06. Sejam $n\geq1$ inteiro e a soma $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Se $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, então S é igual a:

a) $\frac{1}{n(n+1)}$
b) $\frac{n}{n+1}$
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{n(n+1)}$
d) $\frac{1}{n+1}$
e) $\frac{1}{2(n+1)}$

07. Roberval plantou 165 mudas de árvores frutíferas em canteiros, de modo que, no segundo canteiro, plantou o dobro de mudas do primeiro; no terceiro, plantou tantas mudas quantas nos dois anteriores juntos; no quarto canteiro, plantou um número de mudas igual à soma do primeiro canteiro com o canteiro anterior; no quinto canteiro, plantou um número de mudas igual à soma do primeiro canteiro com o canteiro anterior e assim por diante, até plantar todas as mudas. Sabendo-se que ele usou o maior número de canteiros possível e o número de canteiros é menor que 12, em quantos canteiros ele plantou as mudas?

a) 11.
b) 10.
c) 9.
d) 8.
e) 7.

08. Um fazendeiro contratou uma empresa para a construção de uma estrada de 5 km de extensão. Como o terreno em que seria construída a estrada não era regular e o grau de dificuldade de construçao da mesma era crescente, os pagamentos deveriam ser realizados nas seguintes condiçoes: R$ 1.000,00 pelos primeiros 500m, R$ 2.000,00 pelos 500m seguintes, e assim por diante, aumentando-se sempre de R$ 1.000,00 o valor do serviço a cada 500m. Considerando-se esses dados, o valor total que a empresa recebeu foi de

a) R$ 10.000,00.
b) R$ 11.000,00.
c) R$ 40.000,00.
d) R$ 55.000,00.
e) R$ 110.000,00.

09. Se $3^x + (3^x + 4) + (3^x + 8) + ... + (3^x + 52) = 371$, o valor de 3^{-x} pode ser

a) 1/27.
b) 1/4.
c) 1/2.
d) 2.
e) 27.

10. Um estacionamento cobra R$1,50 pela primeira hora. A partir da segunda, cujo valor é R$1,00 até a décima segunda, cujo valor é R$ 0.40, os preços caem em progressão aritmética. Se um automóvel ficar estacionado 5 horas nesse local, quanto gastará seu proprietário?

a) R$ 4,58
b) R$ 5,41
c) R$ 5,14
d) R$ 4,85
e) R$ 5,34