**Progressões Geométricas**

## Definição

Chama – se progressão geométrica – PG – qualquer seqüência de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão.

## Exemplos

$(1,2,4,8,16,32,...)$ PG *de razão 2*

$(5,5,5,5,5,5,5,...)$ PG *de razão 1*

$(100,50,25,...)$ PG *de razão ½*

$(2,-6,18,-54,162,...)$ PG *de razão -3*

## Termo geral da P.G.

Seja a PG genérica $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$, onde $a_1$ é o primeiro termo, e $a_n$ é o $n$-ésimo termo, ou seja, o termo de ordem $n$. Sendo $q$ a razão da PG, da definição podemos escrever:

$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2.q = (a_1.q).q = a_1.q^2$$
$$a_4 = a_3.q = (a_1.q^2).q = a_1.q^3$$

..................................................................
..................................................................

De modo geral, o termo $a_n$, que ocupa a n-ésima posição na seqüência, é dado por: $\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$, que é denominada *fórmula do termo geral da* P.G.

**Exemplos**

01. Determinar o 10º. termo da P.G. (2, 6, 18, ...).

02. Numa P.G., o 5º. termo é igual a 112 e o 1º. termo é igual a 7. Determinar a razão da P.G. e o seu 8º. termo.

03. Construir a P.G. em que a soma do 3º. com o 5º. termo é $\frac{5}{2}$ e a soma do 7º. com o 9º. termo é 40.

04. Determinar $x$ a fim de que a seqüência $\left(\frac{9x-4}{2}, x, x-3\right)$ seja uma P.G.

05. Determinar três números em P.G. cujo produto seja 3.375 e a soma do 1º. com o 3º. termo seja igual a 78.

06. Interpolar três meios geométricos entre $\frac{1}{2}$ e 128.

**Genericamente:**

$\boxed{a_j = a_k \,.\, q^{j-k}}$,

**Nota**

Uma PG genérica de 3 termos, pode ser expressa como: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, onde $q$ é a razão da P.G.

**Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G.**

Seja a P.G. $\left(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...\right)$. Para o cálculo da soma dos $n$ primeiros termos $S_n$, vamos considerar o que segue:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão $q$ vem:

$$S_n.q = a_1.q + a_2.q + ... + a_{ñ-1}.q + a_n.q.$$

Logo, conforme a definição de P.G., podemos reescrever a expressão acima como:

$$S_n.q = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n.q$$

Observe que $a_2 + a_3 + ... + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Logo, substituindo, vem:

$$S_n.q = S_n - a_1 + a_n.q$$

Daí, simplificando convenientemente, chegaremos à seguinte fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

Se substituirmos $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$, obteremos uma nova apresentação para a fórmula da soma, ou seja:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}}$$

**Exemplo**

09. Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.G. $\left(1, 2, 4, 8, ...\right)$

10. Calcular a soma dos $n$ primeiros termos da P.G. $\left(1, 2, 4, 8, ...\right)$

11. Qual o número mínimo de termos que devem ser considerados na P.G. $\left(3, 9, 27, 81, ...\right)$ para se obter uma soma maior que 1.000?

**Série geométrica convergente**

O que acontece com a soma dos termos de uma P.G. quando levamos em conta um número cada vez maior de termos a serem somados?
Vamos considerar dois casos:

1º.) Seja a P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{1}{2}$. Calcule a soma de seus $n$ primeiros termos para alguns valores de $n$:

$$S_5 \frac{1.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 1{,}9375$$

$$S_{10} \frac{1.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}998$$

$$S_{20} \frac{1.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}999998$$

Podemos notar que, à medida que $n$ aumenta, o valor de $S_n$ fica cada vez mais próximo de 2. Dizemos que, para valores de $n$ tão grandes quanto se queira, a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ *converge* para 2, ou, ainda, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

2º.) Seja a P.G. (2,4,8,16,...) de razão q=2. Calculando alguns valores de $S_n$, temos:

$$S_5 = 62; S_{10} = 2.046; \ S_{20} = 2.097.150$$

Podemos notar que, à medida que $n$ aumenta, $S_n$ também aumenta, isto é, o valor de $S_n$ fica tão grande quanto se queira. Dizemos que a soma 2+4+8+16+...*diverge.*

Nosso objetivo é estudar apenas as *séries geométricas convergentes.*
Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ cuja razão $q$ é tal que: $\boxed{-1 < q < 1}$

*Assim,* $q^n$ *é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente* n *aumenta.*

Então, quando calculamos $S_n$ para $n$ *suficientemente grande,* temos:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Assim,

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \frac{a_1}{1-q}; -1 < q < 1}$$

Esse é o valor para o qual a soma converge.

**Exemplos**

12. Calcular o valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$

13. Resolver a seguinte equação: $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + ... = \frac{4}{3}$

14. Obter a fração geratriz da dízima 0,272727...

15. Qual o valor de $x$ na equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + ... = 100$

**Produto dos termos de uma PG limitada**

$$(P_n)^2 = (a_1 . a_n)^n$$

**Questões Anteriores do Teste ANPAD**

01. Seja $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante de $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$. Se o discriminante de $ax^2 + 2bx + c = 0, \quad a \neq 0$, é zero, então é **CORRETO** afirmar que *a, b* e *c*:

a) formam uma progressão geométrica.
b) formam uma progressão aritmética.
c) são distintos.
d) são números negativos.
e) Apenas *b* é negativo e *a* e *c* são positivos.

02. Somando-se um mesmo número a cada termo da seqüência (20, 50, 100), a resultante é uma progressão geométrica de razão:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{5}{3}$

03. A respeito da seqüência definida por: $a_1 = 3$ e $a_{k+1} = 2a_k$ para $k \geq 1$, pode-se afirmar que:

a) a seqüência pode ser apresentada como $a_k = 3\left(2^{k-1}\right)$ para $k \geq 1$.
b) a seqüência é convergente.
c) é uma seqüência decrescente.
d) essa seqüência não é monótona.
e) é uma seqüência constituída somente por números primos.

04. Uma bola cai de uma altura de 12m. Cada vez que ela bate no chão, sobe a uma altura de três quartos da altura anterior. Então a **distância percorrida** em metros pela bola até o repouso é:

a) 84
b) 48
c) 36
d) $\dfrac{84}{7}$
e) $\dfrac{48}{7}$

05. Considere a seguinte expressão:

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots}{\sum_{i=1}^{n} i}$$

Pode-se afirmar que essa expressão:

a) é limitada para todo $x \in \Re$.
b) cresce indefinidamente para todo $x \in \Re$.
c) para $x = 0,5$ vale $\dfrac{8}{3n(n+1)}$.
d) para $x = 0,5$ vale $\dfrac{4}{n(n+1)}$.
e) para $x = 0,5$ vale $\dfrac{4}{3(n+1)}$.

06. O conjunto solução da desigualdade

$|x-1| + \dfrac{|x-1|}{3} + \dfrac{|x-1|}{9} + \ldots \leq \dfrac{3}{2}$ é:

a) $\varnothing$
b) $\{x \in \Re; -1 \leq x \leq 1\}$
c) $\{x \in \Re; 0 \leq x \leq 2\}$
d) $\{0\}$
e) $\{x \in \Re; x \leq 0 ou\ x \geq 2\}$

07. As medidas dos lados de um triângulo retângulo são números em progressão geométrica. Então a RAZÃO dessa progressão é:

a) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}} + 1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

08. Considere a seqüência finita $\left\{2^{k-1}\right\}_{k=1}^{n}$

a) $2^{n-1}$
b) $2^{n}$
c) $2n+1$
d) $2^{n}-1$
e) $n^{2}-1$

09.A soma indicada por $\sum_{i=1}^{n}(10^{i+1}-10^{i})$ vale:

a) $10^{n}-1$
b) $10(10^{n}-1)$
c) $10^{n+1}-10^{n}$
d) $n(10^{n+1}-10^{n})$
e) $(n+1)(10^{n}-10)$

10. Considere um triângulo eqüilátero de lado 1, denominado $T1$. Inscreva nesse triângulo um outro triângulo eqüilátero, denominado $T2$, cujos vértices são os pontos médios dos lados de $T1$. Inscreva em $T2$ um outro triângulo eqüilátero $T3$ com as mesmas propriedades acima, isto é, seus vértices são pontos médios dos lados de $T2$. Proceda desta maneira até obter o triângulo $T6$. A soma dos perímetros desses triângulos é:

a) $5x^3$
b) $\frac{5x^3}{2^5}$
c) $\frac{93}{16}$
d) $\frac{189}{32}$
e) $\frac{381}{64}$

11. Uma bola é solta de uma altura de 1.024 metros. Cada vez que a bola atinge o solo ela volta a subir, atingindo uma altura igual a 75% da altura que tinha antes de atingir o solo. Após atingir o solo pela quarta vez a sua altura máxima será igual a:

a) 324m
b) 128m
c) 64m
d) 432m
e) Nenhuma das respostas acima.

12. Com relação à soma da série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{6}\right)^{k-1}$, pode-se afirmar que:

a) não existe.
b) é igual a 5.
c) é igual a $\frac{30}{7}$.
d) é igual a $\frac{35}{6}$.
e) é igual a $\frac{6}{7}$.

13. Um pedreiro está construindo um muro, de modo tal que, a partir do segundo dia, a superfície concluída a cada dia é o dobro da levantada no anterior. Dessa forma, o profissional leva 10 dias para realizar a tarefa. Se, em vez de apenas um pedreiro, trabalhassem dois com o mesmo desempenho do primeiro, o tempo necessário para realizar a mesma tarefa seria de

a) 5 dias.
b) 6 dias.
c) 7 dias.
d) 8 dias.
e) 9 dias.

14. No organismo de um rato de laboratório, foram introduzidos dois vírus que atacam o sistema imunológico e foi verificado, com um cronômetro, que a cada três minutos dobrava o número de vírus e, para cada vírus, um anticorpo ( elemento de defesa do organismo) era absorvido para manter o vírus ativo. Ao completar 90 minutos após a introdução dos vírus no ratinho, os últimos anticorpos foram absorvidos e todos os vírus estavam ativos sem exceção: logo, pode-se afirmar, com certeza, que o ratinho ficou somente com a metade da defesa (metade dos anticorpos) do seu organismo combatendo os vírus exatamente quando o cronômetro indicou:

a) 3 minutos
b) 30 minutos
c) 45 minutos
d) 60 minutos
e) 87 minutos

15. Considerando a dízima $x = 0,1666666...$, qual a fração que a gerou?

a) $\frac{16}{90}$.
b) $\frac{15}{90}$.
c) $\frac{16}{100}$.
d) $\frac{15}{100}$.
e) Não existe uma fração que gere a dízima.